Quantenmechanik

und

Spieltheorie ?

Kay Hamacher

Universität Dortmund

27.6.2000

Spieltheorie?

Spieltheorie
=
interaktive Entscheidungstheorie

- Mathematik
- Ökonomie
- Militär
- Versuchsplanung

- John von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Ann., Band 100
- John von Neumann, Oskar Morgenstern, *Theory of games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, 1953

Klassische Spieltheorie

Reine Strategie zuvor bestimmt, genau eine Verhaltensweise. Deterministisch.

Gemischte Strategie $p\left(s\right)$ sei eine Wahrscheinlichkeitsdichte, mit der Strategie s gespielt wird. Stochastisch.

v.Neumann: Für jedes Spiel in Normalform exisitiert ein (Nash-)Gleichgewicht in (gemischten) Strategien!

Quantenmechanik in Spielen ?

Milnor: Spiele gegen die Natur[a]

Spiele mit QM-Regeln:

- Quantum Error Correcting Codes[b]. Spiel gegen die Natur
- Database Search[c]. Spiel gegen die Natur
- Quantum Cryptography[d]. Spiel gegen einen Gegner

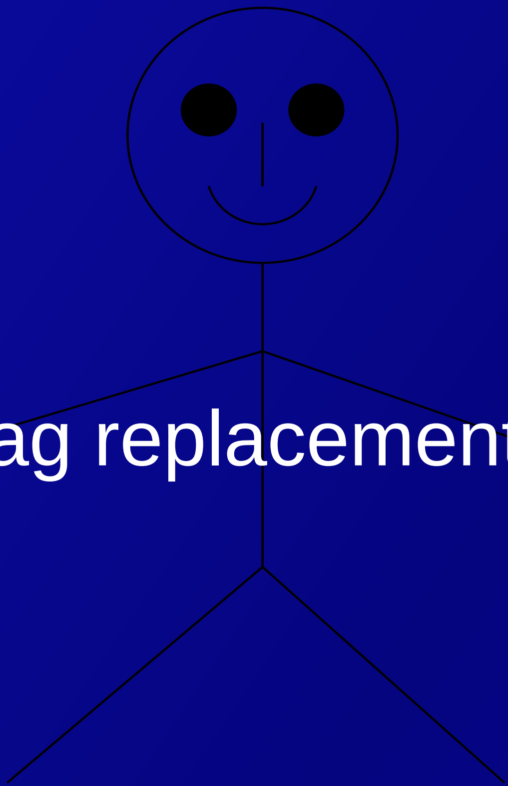
[a] Milnor, “Games against nature”, in *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, 1954

[b] P.W.Shor, Phys.Rev.A **52**(1995)R2493-R2496

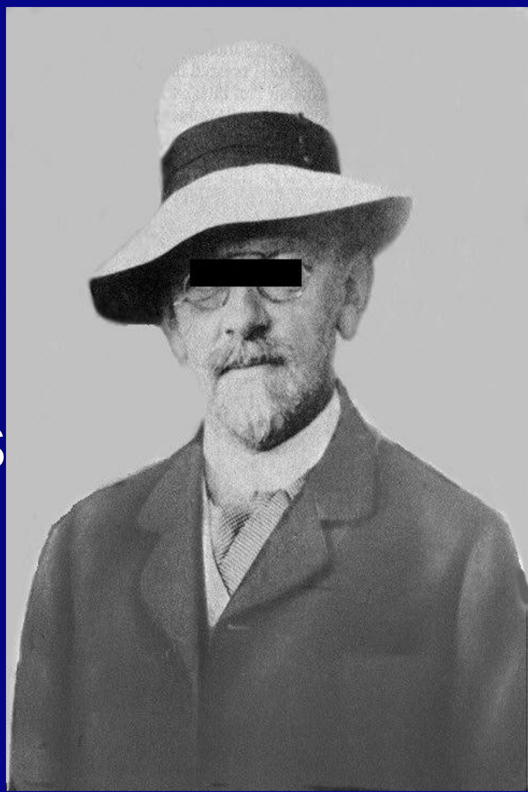
[c] L.K.Grover, “A fast quantum mechanical algorithm for database search”, Proceedings of the 35th Symposium on Foundations of Computer Science 116-123

[d] A.Ekert, Phys.Rev.Lett. **67**(1991)661-663

Eine kleine Geschichte[a]



PSfrag replacements



Billy *(B)* Theoretiker *(T)*

T zu B: *“Laß uns doch mal ein Spiel spielen!”*

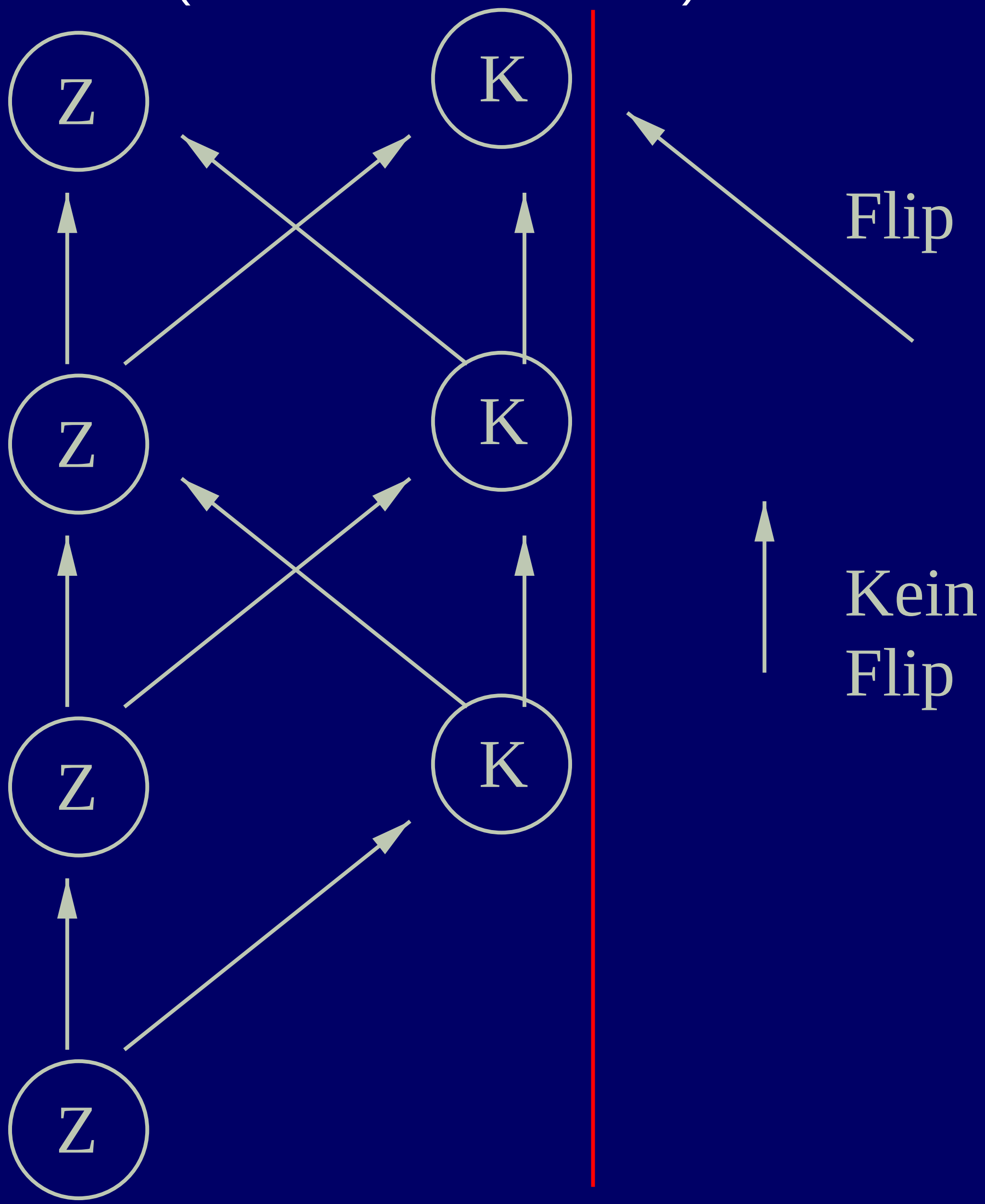
---

[a] D.A.Meyer, Phys.Rev.Lett. **82**(1999)1052-1055

Münze-Drehen

Spiel in extensiver Form

(hier etwas modifiziert)



Münze-Drehen in Normalform

$$
\begin{aligned}
G &= (N, S, U) \\
N &= \{B, T\} \\
S &= ((F, N), \\
&\quad (FF, FN, NF, NN))
\end{aligned}
$$

Nullsummenspiel mit endlichem Strategienraum

$\rightarrow$ Matrixspiel. Deswegen hier nur U für B:

	FF	NF	FN	NN
F	1	-1	-1	1
N	-1	1	1	-1

$$\langle U \rangle = p_B^T \cdot U \cdot p_T$$

Gemischte Strategie des Nash-Gg ($\langle U \rangle = 0$):

$$
\begin{aligned}
p_B\,(N, F) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
p_T\,(NN, FN, NF, FF) &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}
$$

Das Spiel und seine Darstellung

Zustände: $|K\rangle \quad |Z\rangle \;\rightarrow$

Start: $\vec{s} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Flip

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kein Flip

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gemischte Strategie

$$G := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \qquad p \in [0;1]$$

Ende: $\vec{e} := G_T \cdot G_B \cdot G_T \cdot \vec{s}$

Und nun ein wenig QM

Nun spielt T aber die Strategie

$$U\left(a,b\right) := \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix}$$

mit $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$ und $a, b \in \mathbb{C}$

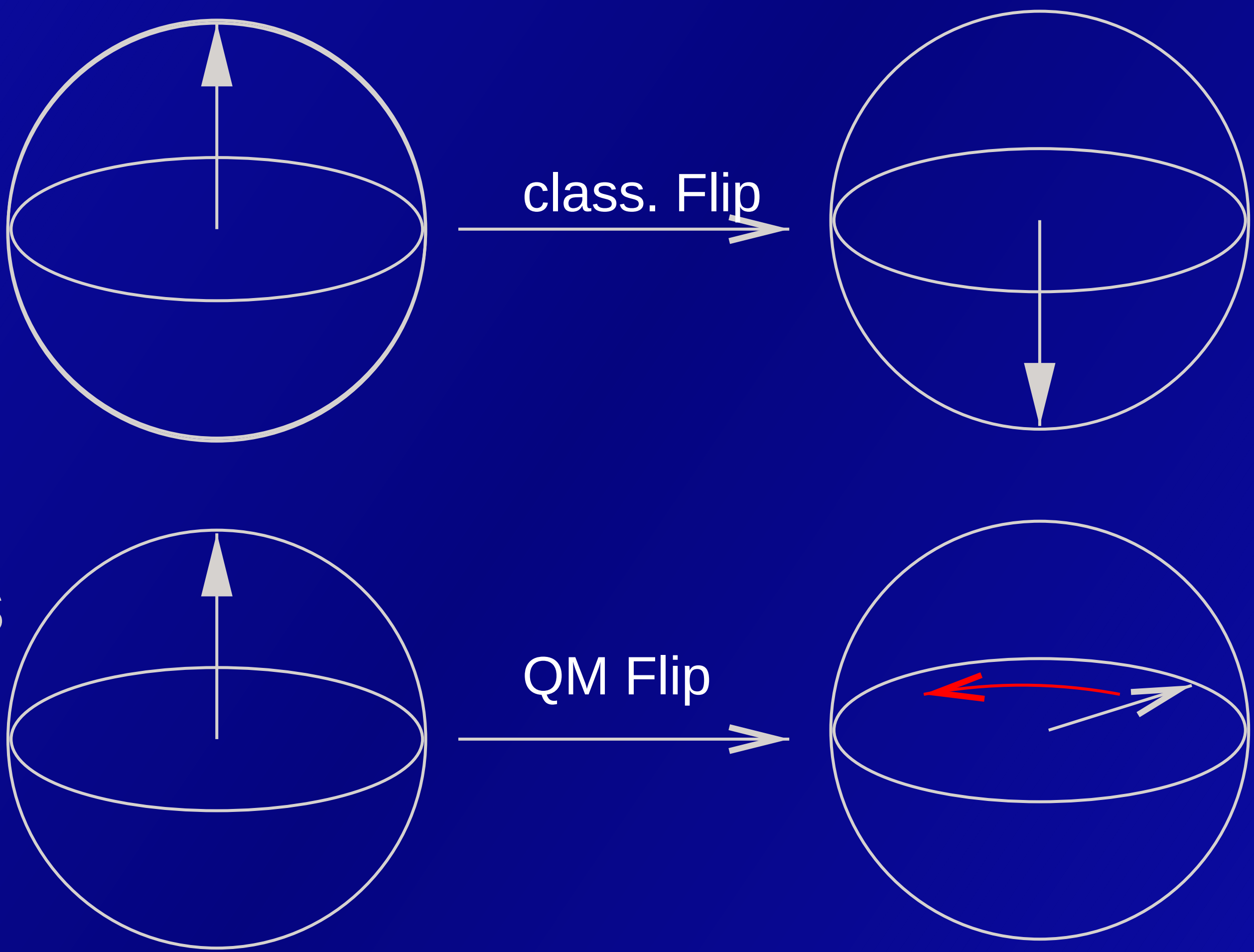
$U\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$: Hadamard-Transformation

Gleichgewicht ist

$$\begin{aligned} S_B &= pF+(1-p)N \qquad p\in[0;1] \\ S_T &= U(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),U(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \end{aligned}$$

mit $E = 1$ für T

Wie funktioniert das denn nun?



ments

z.B. EM-Pulse auf Spins

Aber so etwas spielt doch in Wirklichkeit niemand!

DOCH!

Quantum Communication ist genau eine Realisierung dieses Spiels.

B: Natur mit einem stochastischen Verhalten (Fluktuationen)

T: kommunizierender Anwender

Einige strikte Resultate

Theorem I:

Der erwartete Gewinn eines Spielers mit optimaler Quanten-Strategie ist mindestens so groß wie sein erwarteter Gewinn bei einer optimalen gemischten Strategie.

Theorem II:

Ein Zwei-Personen Nullsummen-Spiel muß kein (QM,QM)-Gleichgewicht haben.

Theorem III:

Ein Zwei-Personen Nullsummen-Spiel hat immer ein (gemischte QM,gemischte QM)-Gleichgewicht. Wobei *gemischte QM* = konvexe Kombination von unitären Transformationen

Kleine Sünden bestraft der liebe Gott sofort, . . .

Aussagen *(A)* oder Schweigen *(S)* ?

	A	S
A	(8,8)	(0,10)
S	(10,0)	(1,1)

(S,S) ist Pareto-optimal

(A,A) ist stabiles Gleichgewicht

und ineffizient !

Hier ein Nash-Gg in reinen Strategien!

Aber bei Wiederholung: “Tit-for-tat”[a] besser!

[a] R.Axelrod, *“The Evolution of Cooperation”*, Basic Books, New York, 1984

Prisoner's Dilemma?

Only for "classical fools"[a]

Start: $|SS\rangle$, J unitärer Operator

Endzustand:

$$|e\rangle := J^{\dagger} \left(U_T \otimes U_E\right) J \, |SS\rangle$$

$$U\left(\theta, \varphi\right) := \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & e^{-i\varphi} \cos \theta/2 \end{pmatrix}$$

dann

$$\hat{S} = U\left(0, 0\right) \qquad \text{und} \qquad A = U\left(\pi, 0\right)$$

Wenn

$$\left[J, \hat{D} \otimes \hat{D}\right] = \left[J, \hat{C} \otimes \hat{D}\right] = \left[J, \hat{D} \otimes \hat{C}\right] = 0$$

dann ist $S_o := \{U\left(\theta, 0\right) | \theta \in [0, \pi] \}$ der Raum der klassischen, gemischten Strategien.

[a] J.Eisert, M.Wilkens and M.Lewenstein, Phys.Rev.Lett. **83**(1999)3077

. . . und was gewinnen wir ?

$$E_E = 1 \cdot P_{SS} + 8 \cdot P_{AA} + 10 \cdot P_{AS} + 0 \cdot P_{SA}$$
$$E_T = 1 \cdot P_{SS} + 8 \cdot P_{AA} + 0 \cdot P_{AS} + 10 \cdot P_{SA}$$

mit $P_{\sigma\sigma'} := |\langle\sigma\sigma'|e\rangle|^2$

Im Raum der reinen Strategien S_o gilt $P_{\sigma\sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$.

Wegen der Antikommutatoren muß

$J = \exp\left\{i\gamma\hat{A} \otimes \hat{A}/2\right\}$ mit $\gamma \in [0; \pi/2]$ sein.

γ ist ein Maß der Verschränkung der Zustände.

Klassisches Spiel: $\gamma = 0$

Die Strategie

$$Q_T = Q_B = U(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

ist sowohl ein Gleichgewicht und pareto-optimal.

Es wird hier maximale Verschränkung benutzt.

Beide müssen ein Jahr im Gefängnis bleiben!